„KAVICS TANÁR ÚR” PÁLYÁZAT

A Fővárosi Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium

feladatmegoldó pályázatot

ír ki matematikából
egykori, iskolát alapító tanára,

KŐVÁRY KÁROLY
„KAVICS”
emlékére

A pályázat feltételei: A pályázaton részt vehet minden legalább hetedikes tanuló. Csak egyéni munkát fogadunk el. A kitűzött feladatok közül a pályázók szabadon választhatják ki, hogy melyik feladatok megoldását küldik be. Igyekeztünk olyan sort összeállítani, amelyben minden évfolyam számára vannak feladatok; **a pályázatot évfolyamonként értékeljük**. A feladatokat **2004. március 10**-ig kell beküldeni az alábbi címre:
Surányi László, Fővárosi Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, 1082 Budapest, Horváth Mihály tér 8.,
vagy word doc, rtf, vagy pdf formátumban az lsuranyi@fazekas.hu e-mail címre.
A pályázat eredményét 2004. májusában hirdetjük ki (Kavics születésnapja alkalmából), neves kutatók, volt Kavics tanítványok közreműködésével. Az eredményhirdetés pontos helyét és időpontját később, ugyanezen a lapon közöljük. Az eredményt neves Kavics tanítványok közreműködésével hirdetjük ki.

A pályázat feladatai:

1. feladat: Az *AB* átmérőjű *O* középpontú félkör egy pontja *P*. *P* vetülete az *AB* szakaszon *Q*, az *AB* ív felezőpontja *C*, *QC* és *OP* egyenes *R*-ben metszi egymást. Mi *R* mértani helye, ha *P* befutja a félkört?

2. feladat: A *k* kör *AB* átmérőjének egy kijelölt pontja *P*. Szerkesztendő az a *P*-n áthaladó *CD* húr, amelyre az *ACBD* húrnégyszög területe maximális.

3. feladat: A 101 kiskutya nagyon szeret birkózni. Ma már több, mint 500 pár mérte össze erejét (minden pár legfeljebb egyszer). Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható közülük néhány (legalább hét) kutya úgy, hogy a kiválasztottak közül mindegyik legalább hat másik kiválasztottal birkózott.

4. feladat: Az „abesszin makaó” nevű kártyajátékot hárman játsszák (a szabályok most nem fontosak). Egy kártya-klub tizenkilenc tagja egy este összesen ötszáz partit fejezett be. Bármely három ember legfeljebb egyszer játszott egymás ellen. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható közülük néhány (legalább hat) úgy, hogy a csak e kiválasztottak által játszott játékokra igaz legyen a következő:
Minden kiválasztotthoz van két másik kiválasztott, akikkel legalább két-két partit játszott.

A következő két feladatban olyan térbeli élhálózatot kell szerkeszteni, amelynek élei (merev) fapálcikák és (kifeszített) madzagok. A csúcsaiban egy madzagok és legfeljebb egy pálcika érintkezhet. (Fapálcikák nem érintkezhetnek.) Élek sehol másutt nem érintkezhetnek. Az élhálózatnak ennek ellenére merevnek kell lennie. itt oda vannak erősítve a velük érintkező pálcikákhoz és madzagokhoz. A madzagok a csúcsokban oda vannak erősítve egymáshoz és a pálcikához. A madzagok között nem lehet felesleges, tehát bármelyik madzagot meglazítva az élhálózat megszűnik merev lenni.

5. feladat: Szerkesszünk ilyen élhálót, amely 12 élből áll, ezekből három fapálcika, a többi madzag.

6. feladat: Szerkesszünk ilyen élhálót, amelyben minden pálcika mindkét végéhez pontosan négy madzag csatlakozik.

7. feladat: Jancsi és Pisti a következő játékot játssza: Jancsinak van tíz érméje, de nem tudja a súlyukat (az érmék nem feltétlenül azonos súlyúak). Pistinek van egy mérlege, amely pontos. Ha Jancsi odaad neki egy érmét, akkor Pisti megméri, majd megmondja, hogy mennyit mért a mérleg. Ám Pisti szeret kicsit hazudni. Megállapodnak, hogy csak tíz mérésnél hazudhat, de nem kell megmondania, hogy melyiknél hazudik. Mutassuk meg, hogy ha Jancsi csak 110 mérést kér, akkor Pisti elérheti, hogy Jancsi ne lehessen biztos minden érme súlyában, de ha Jancsi 120 mérést kér, akkor ügyesen játszva már megtudhatja minden érme súlyát.

8. feladat: Változtatunk az előző játék feltételén: Jancsi most minden mérésnél egyszerre két érme súlyának az összegét méretheti meg, viszont Pisti csak egyszer hazudhat. Mutassuk meg, hogy ha Jancsinak $n=(2k–1)^2=4k^2–4k+1$ érméje van, akkor $4k^2–k+1$ méréssel megtudhatja minden érme súlyát.

9. feladat: Ismét változtatunk az előző játék feltételén: Jancsi továbbra is két érme súlyösszegét méretheti meg, de Pisti kétszer hazudhat. Mutassuk meg, hogy most Jancsi $3n/2 + 100$ méréssel célhoz érhet.

10. feladat: Jellemezzük a derékszögű rácsnak azokat a rácsháromszögeit, amelyekre teljesül, hogy
$(a + b)^2 \leq 8t + 1$,
ahol t a háromszög területe, a és b pedig az oldalai közül kettő.

11. feladat: Legyen p páratlan prím. Legfeljebb hány választható ki a $0, 1, 2, \ldots, p-1$ számok közül úgy, hogy semelyik két különbözőnek se az összege, se a szorzata ne adjon egyet maradékul p-vel osztva?

12. feladat: Jelöljük $\pi(n)$-nel az n-nél nem nagyobb pozitív prímek számát. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan n szám van, amelyre $\pi(n)$ osztója n-nek.

13. feladat: Legyen k olyan pozitív egész szám, amelyre $p = 4k + 1$ prímszám. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $k^k - 1$ osztható p-vel.

14. feladat: Adott a k kör és rajta kívül az A pont. Mutassuk meg, hogy van olyan B pont a síkon, amelyre igaz az alábbi állítás: *a k körön végtelen sok módon kiválasztható hat pont,* A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 *úgy, hogy az* A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 *egyenesek átmennek A-n, a* B_1A_2, B_2A_3, B_3A_1 *egyenesek pedig átmennek B-n.*

15. feladat: Egy körbe három szabályos háromszöget írtunk, az első csúcsai pirosak, a másodiké fehérek, a harmadiké zöldek. Bizonyítandó, hogy van olyan háromszög, amelynek mindhárom csúcsa különböző színű és tartalmazza a kör középpontját.

16. feladat: A sík egy P pontja egy piros, egy kék és egy zöld háromszög közös részében van. Bizonyítandó, hogy kiválasztható a három háromszög egy-egy csúcsa úgy, hogy az általuk alkotott háromszög tartalmazza P-t.