

Ötödik feladatsor

1. feladat

Az a_1, a_2, \dots, a_{80} nyolcvan tagú sorozatban a tagok pozitívak, az első és az utolsó tagon kívül minden tag egyenlő két szomszédjának a szorzatával. Az első negyven tag szorzata 8, ugyanennyi mind a nyolcvan tag szorzata is. Írjuk fel a sorozat első nyolc tagját!

2. feladat

Mely n egészekre lesz az alábbi kifejezés értéke négyzetszám?

$$n^4 - 4n^3 + 14n^2 - 20n + 10$$

3. feladat

Egy derékszögű háromszög befogóira mint átmérőkre kifelé félköröket szerkesztünk. Bizonyítsuk be, hogy annak a négyzetnek a területe, amelynek oldala a két félkör közös érintőszakasza, a derékszögű háromszög területével egyenlő!

4. feladat

Bergengóciában háromféle fémpénz van forgalomban, ezek - növekvő értékrendben – az *alig*, a *bagó* és a *csenevész*. Márton és Nándor a következő játékot játsszák: Márton elővesz egy általa választott érmét, erre Nándor köteles a másik két fajtából egyet-egyet elővenni. A három érmét egyszerre feldobják, és azé lesz mindhárom érme, akinek az írásra esett érméje vagy érméi nagyobb összértéket képviselnek. Ha csupa fej jön ki, akkor mindenki megtartja a saját pénzét. (Más esetben nem fordulhat elő döntetlen.) A fiúk észreveszik, hogy a játék mindig igazságos, akármelyik érmét is veszi elő Márton. Hány *aligot* ér egy *csenevész*?

5. feladat

Egy szabályos tetraéder köré írt gömb sugara R . Mekkora annak a gömbnek a sugara, amely a tetraéder három lapját és a tetraéder köré írható gömböt belülről érinti?

I.

Xénia és Olivér az amőba játék alábbi változatát játsszák. Egy (minden irányban végtelen) négyzethálós papíron Xénia egy tetszőleges négyzetbe egy x jelet ír, illetve Olivér *két* tetszőleges négyzetbe egy-egy o jelet ír. Olivér akkor nyer, ha vízszintesen vagy függőlegesen egymás mellett száz o jelet elér, egyébként a játék a végtelenségig folytatódik. Meg tudja-e akadályozni Xénia azt, hogy Olivér nyerjen?

II.

Adjuk meg az alábbi egyenletrendszer összes olyan megoldását, ahol x, y, s és t racionális számok!

$$t^2 + (s + x)^2 = s^2 + y^2 = (y + t)^2 + x^2$$